

TP Weibull

1. Introduction

Un des problèmes majeurs rencontrés lors de la conception de pièces structurales est la connaissance de la contrainte maximale qu'elles peuvent supporter sans rupture brutale. Pour cela, différents essais standardisés existent, comme l'essai de traction.

Pour les matériaux fragiles, cette approche perd de sa simplicité : la rupture ne se fournit plus à une valeur unique de la contrainte. Deux éprouvettes pourtant identiques — même matériau, même géométrie, même préparation — présentent dans ces matériaux des contraintes à rupture très différentes.

La raison en est que la rupture d'un matériau fragile débute à un défaut présent dans son volume ou à sa surface : microfissure, inclusion, précipité, défaut de surface, pore, etc. Ces défauts, introduits lors de la fabrication ou générés par l'usage (par exemple une microfissure dans le verre due à une rayure créée par exemple lors de sa rencontre avec un autre matériau), varient pour un matériau donné d'un échantillon à l'autre. Les caractéristiques de ces défauts (taille, forme, orientation, nature) déterminent la contrainte à laquelle la fissuration catastrophique de l'échantillon sera amorcée. La résistance mécanique des matériaux fragiles devient donc une grandeur statistique, gouvernée par la distribution des défauts internes ou de surface qu'il contient, et par leur interaction avec le champ de contraintes.

Ainsi, la contrainte à rupture ne présente plus une distribution étroite mais au contraire acquiert une dispersion significative, dépendant non seulement du matériau et de son élaboration, mais aussi du volume sollicité et de la distribution des contraintes. Cette variabilité est, de par la physique du problème, le plus souvent décrite par la distribution statistique de Weibull.

Le modèle probabiliste de Weibull

La résistance mécanique d'un matériau fragile dépend donc fortement de la présence de défauts internes (microfissures, inclusions, pores, etc.). La rupture se produit lorsque l'un de ces défauts commence à se propager sous l'effet de la contrainte appliquée. Dès qu'une fissure se propage, l'éprouvette se rompt : c'est le principe du **maillon faible**.

Le modèle de Weibull décrit la **probabilité de rupture $P_r(\sigma)$** d'un matériau de volume V soumis à une contrainte uniaxiale σ . Ce modèle se base sur deux hypothèses :

- 1. Défauts indépendants** : On considère que chaque élément de volume infinitésimal dV peut contenir des défauts pouvant dégénérer en une fissure. Leur présence et leur sévérité sont aléatoires, et chaque élément de volume dV se comporte indépendamment des autres.
→ Hypothèse simplificatrice mais généralement acceptable pour les matériaux fragiles.
- 2. Loi du maillon faible** : Si un seul défaut devient critique dans un volume dV , l'éprouvette entière se rompt.
→ Une rupture locale entraîne la rupture globale.

Différentes lois de probabilité peuvent être utilisées selon les cas, mais la plus utilisée pour modéliser la survenue d'un « défaut critique » est la **loi de Poisson**. En effet, on peut présenter la statistique de

Weibull en postulant que cette loi détermine la distribution de défauts au sein du volume du matériau. La probabilité P_k de trouver k défauts activés dans un volume V est alors donnée par l'équation :

$$P_k(V) = \frac{(\lambda V)^k}{k!} e^{-\lambda V} \quad (1)$$

Si $k = 0$: aucun défaut n'est activé et l'échantillon **survit**

Si $k \geq 1$: au moins un défaut est activé menant à la **rupture** globale de l'échantillon.

On peut donc déterminer la **probabilité de survie** comme étant la probabilité de n'avoir aucun défaut activé :

$$P_{survie} = P_{k=0}(V) = e^{-\lambda V} \quad (2)$$

La **probabilité de rupture**, notée P_F , est donc :

$$P_F = 1 - P_{k=0} = 1 - e^{-\lambda V} \quad (3)$$

Les Eqs. 1 à 3 font intervenir λ , qui est un paramètre représentant la densité d'activation des défauts internes sous une contrainte σ donnée. Weibull a proposé qu'il soit modélisé par la loi puissance suivante :

$$\lambda = \frac{1}{V_0} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \quad (4)$$

Avec :

- m : appelé **module de Weibull** : sert à rendre compte du degré d'homogénéité des défauts au sein du matériau. Il est toujours positif et peut théoriquement varier de 0 à ∞ .
 - Plus m est faible, plus les défauts sont répartis de manière hétérogène dans le matériau. On observe donc une dispersion des contraintes à rupture importante. C'est le cas par exemple des céramiques traditionnelles comme les briques et les bijoux ($m < 3$).
 - Plus m est élevé, plus les défauts sont répartis de manière homogène et la dispersion des contraintes à la rupture est faible. C'est le cas par exemple des métaux ($m \approx 100$).
- V_0 : appelé **volume de référence** est un paramètre représentant l'échelle d'étude pour le matériau
- σ_0 : appelé **contrainte caractéristique** donne une contrainte moyenne d'activation des défauts du dit matériau.

Par conséquent, en combinant l'Eq. 3 avec l'Eq. 4, la probabilité de rupture devient la **loi de Weibull à deux paramètres** :

$$P_F = 1 - \exp \left[- \frac{V}{V_0} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \right] \quad (5)$$

Il est à noter que cette loi est à deux et non trois paramètres car V_0 et σ_0 ne sont pas indépendants l'un de l'autre et peuvent être combinés en un autre paramètre, appelé le **facteur d'échelle** :

$$\sigma_0 V_0^{1/m} \quad (6)$$

Lorsque :

$$\sigma V^{1/m} = \sigma_0 V_0^{1/m}$$

On obtient :

$$P_F = 1 - \frac{1}{e} \approx 0.63$$

ce qui donne un point pratique pour interpréter les données expérimentales : pour cette combinaison de contrainte et de volume, la probabilité de rupture du matériau est de 63 %.

2. L'influence du volume et de la contrainte

a. Chargement uniforme en traction

Un point important du modèle de Weibull est le fait que **plus un volume de matériau est grand, plus il est fragile**. C'est contre-intuitif : une grande plaque de verre casse plus facilement qu'une fibre de verre pourtant faite du même matériau. La raison est statistique, et en est qu'un volume plus grand a **plus de chances de contenir un défaut critique**, même si le matériau est identique.

Considérons des éprouvettes identiques de volume V_0 , soumises à une contrainte uniforme σ_0 . Leur probabilité de rupture est notée P_{F0} . Si l'on prend maintenant une éprouvette plus grande, de volume $V_n = nV_0$, de par la loi du maillon faible, elle est équivalente, du point de vue de Weibull, à **n éprouvettes de volume V_0 montées en série** (voir Fig. 1). Dans une chaîne de n maillons, il suffit qu'un seul casse pour que l'ensemble casse, ainsi :

$$1 - P_{Fn} = (1 - P_{F0})^n \Leftrightarrow \log(1 - P_{Fn}) = n \log(1 - P_{F0}) \quad (7)$$

De manière plus générale, pour une éprouvette de volume total V , on obtient :

$$\log(1 - P_F) = \frac{V}{V_0} \log(1 - P_{F0}) \quad (8)$$

Ce résultat montre bien que le risque de rupture augmente avec le volume.

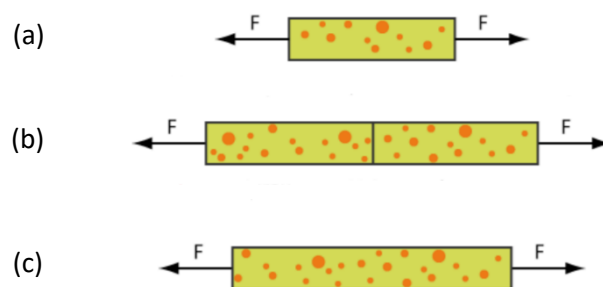


Fig. 1 : Essai de traction sur différents montages d'éprouvettes soumises à une même force F : (a) une éprouvette de volume V_0 , (b) une éprouvette de volume $V_2 = 2 V_0$, équivalente à deux éprouvettes de volume V_0 chacune en série, (c) une éprouvette de volume $V_n = n V_0$. Les points orange représentent schématiquement la répartition des défauts dans les échantillons.

b. Cas plus réaliste : contrainte non uniforme

Jusqu'ici, nous avons supposé une contrainte uniforme dans tout le matériau (traction simple). Mais dans la réalité, une pièce peut être soumise à des **contraintes hétérogènes**, par exemple :

- en flexion : contraintes plus élevées aux fibres externes,
- en torsion : contraintes plus élevées en périphérie,
- en contact : pics de contraintes localisés.

Or, plus la contrainte locale est élevée, plus la probabilité d'amorcer un défaut y est grande.

Un volume effectif V_{eff} est donc défini comme le volume fictif que devrait avoir une éprouvette du même matériau soumise à un essai de traction uniaxial (contrainte uniforme) pour avoir une probabilité de rupture identique à celle de la pièce considérée avec son champ de contraintes non uniforme et son volume V quand cette dernière est soumise à un champ de contrainte dont la valeur maximale est σ_F . Ce volume s'écrit :

$$V_{eff} = k_m V \quad (9)$$

avec k_m , un facteur représentatif de l'hétérogénéité des contraintes. Plus précisément, V_{eff} peut être calculé via l'équation 10 :

$$V_{eff} = \int \left(\frac{\langle \sigma \rangle}{\sigma_F} \right)^m dV \quad (10)$$

avec :

- $\langle \sigma \rangle$ la valeur positive locale de la contrainte
- σ_F la contrainte à rupture mesurée par sa valeur locale maximale au sein de la pièce
- m le module de Weibull.

$\langle \sigma \rangle / \sigma_F$ ainsi moyenné donne donc la normalisation du champ de contrainte dans le matériau par rapport à la contrainte à rupture. On voit en regardant cette expression qu'elle donne plus de poids aux zones très sollicitées, car elles ont une probabilité plus élevée d'activation d'un défaut.

En prenant en compte le volume effectif V_{eff} , Eq. 6 devient

$$P_F = 1 - \exp \left[- \frac{V_{eff}}{V_0} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \right] \quad (11)$$

Cette forme générale permet donc de traiter aussi bien :

- des éprouvettes simples (traction),
- des pièces plus complexes (flexion, torsion, multiaxialité),
- ou des géométries non homogènes.

du moment que le champ de contraintes au sein de la pièce ne diffère pas localement trop d'un champ uniaxial; pour des champs de contraintes multiaxiales, la question devient plus complexe.

3. Le montage flexion trois-points

L'essai de traction classiquement utilisé pour les matériaux ductiles (métaux, polymères) se révèle plutôt inadéquat pour les matériaux fragiles, tels que les verres ou les céramiques. En effet, pour ces matériaux, la simple mise en place de l'éprouvette dans les mors de la machine peut suffire à initier

une fissure voire provoquer la rupture avant essai. Pour éviter cela, on utilise généralement un **essai de flexion trois points** (ou quatre points) (voir Fig. 2). Ce type d'essai applique des charges sur le matériau de manière plus douce et contrôlée, ce qui permet de mesurer la résistance mécanique sans endommager l'échantillon au préalable.

Dans le montage de la flexion 3 points, une éprouvette rectangulaire repose sur **deux appuis inférieurs**, tandis qu'une **force verticale F** est appliquée par un appui supérieur en son centre (Fig. 2).

- Les appuis inférieurs génèrent une réaction vers le haut.
- La force centrale pousse vers le bas.
- La poutre se déforme et fléchit (Fig. 2b).

Cette flexion produit un champ de contraintes **non uniforme** (Fig. 3) :

- **Compression** : dans la partie supérieure.
- **Traction** : dans la partie inférieure.

Comme les matériaux fragiles se cassent par fissuration due par une contrainte de traction, c'est **toujours dans la zone tendue (en bas)** que la fissure s'initie.

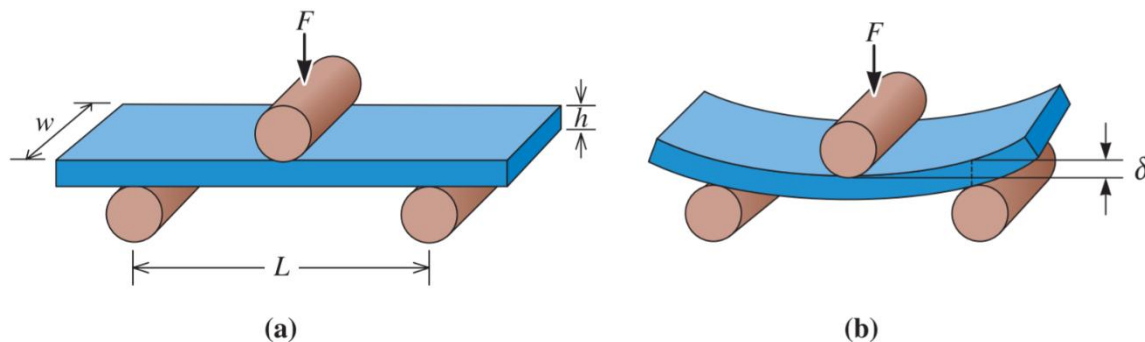


Fig. 2 : Essai de flexion trois points : (a) le montage avant l'application d'une force F , (b) sous l'application d'une force F , le matériau commence à se tordre.

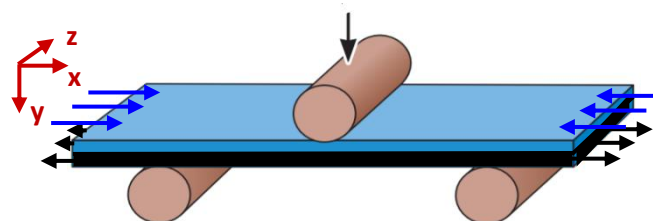


Fig. 3 : Répartition des contraintes exercées sur une pièce dans un montage de flexion trois points. En bleu, les contraintes en compression réparties sur la moitié supérieure. En noir, les contraintes en tension réparties sur la moitié inférieure.

Pour un barreau de largeur w , de hauteur h , soumis à une force F en flexion trois points, la contrainte locale s'exprime approximativement par :

$$\sigma(x, y) = \frac{6Fxy}{wh^3} \quad (12)$$

La contrainte est donc maximale à mi-longueur entre les appuis : $x = L/2$ et à la fibre inférieure : $y = h/2$. C'est généralement là ou dans le voisinage de cette ligne que la rupture s'initie. Cette contrainte maximale, appelée **résistance à la flexion** ou **module de rupture du matériau** est notée σ_F [MPa] et est définie comme suit :

$$\sigma_F = \frac{3FL}{2wh^2} \quad (13)$$

avec :

- F le chargement à rupture
- L la distance entre les deux appuis inférieurs.

Le volume effectif V_{eff} , défini dans la section 2, peut donc être calculé pour une éprouvette soumise à la flexion trois-points ; le calcul donne :

$$V_{eff} = V_{ep} \frac{1}{2(m+1)^2} \quad (15)$$

avec $V_{ep} = Lhw$, le volume réel de l'éprouvette. La démonstration de ce calcul est donnée en annexe.

4. Matériel et instrumentation

Dans le cadre de ce TP, le matériau suivant sera testé sur des systèmes manuels de flexion 3 points:

Matériau	Nombre de échantillons
PMMA (polyméthacrylate de méthyle)	30

5. Consigne de sécurité

Il est impératif de porter des lunettes de protection et une blouse de laboratoire fermée lors de ce TP.

6. Déroulement du TP

1. Testez les 30 éprouvettes de PMMA en flexion 3 points et notez pour chacune les dimensions de l'éprouvette et la force à rupture dans un tableau Excel
2. Calculez la résistance à la flexion σ_F de chaque éprouvette
3. Classez les valeurs de σ_F dans l'ordre croissant et assignez-leur un numéro, i.e. 1 est la résistance à la flexion la plus faible et 30 est la plus élevée.
4. Pour chaque éprouvette, calculez la probabilité de rupture P_F , en utilisant la loi probabiliste suivante :

$$P_F = \frac{i - 0.5}{N} \quad (17)$$

Avec N le nombre total d'éprouvettes testées et i leur numéro assigné.

Pour un essai de flexion trois-points, la formule générale donnée dans l'Eq. 11 devient :

$$1 - P_F = \exp \left[- \frac{V}{2(m+1)^2 V_0} \left(\frac{\sigma_F}{\sigma_0} \right)^m \right] \quad (18)$$

En en prenant deux fois le logarithme népérien :

$$\ln[-\ln(1 - P_F)] = m \ln \sigma_F + \ln \left[\frac{V}{2(m+1)^2 V_0 \sigma_0^m} \right]$$

Cette relation est de la forme :

$$y = mx + b$$

ce qui signifie qu'un tracé approprié doit donner une **droite**.

5. Calculez $\ln[-\ln(1-P_F)]$ pour chaque éprouvette.
6. Tracez sur un graphique $\ln[-\ln(1-P_F)]$ en fonction de $\ln(\sigma_F)$. Le nuage de points doit s'aligner **approximativement sur une droite** (comportement de Weibull).
7. Déterminez les paramètres de Weibull : le module de Weibull m et le facteur d'échelle $\sigma_0 V_0^{1/m}$
8. Quelles sont vos conclusions sur l'état du matériau étudié ? Développez votre réponse à partir du graphe et de vos valeurs numériques. Voici une série de questions non exhaustive pour interpréter vos résultats.
 - Le matériau présente-t-il une forte hétérogénéité des défauts ?
 - Quel résultat attendriez-vous si le volume était 2 fois plus grand ?
 - Quel résultat attendriez-vous si vous aviez fait de la traction et non de la flexion 3 points ?
 - Sur le graphique $\ln[-\ln(1-P_F)]$ vs $\ln(\sigma_F)$, les points s'alignent-ils bien sur une droite ?
 - Si non, que peut-on en déduire sur la validité du modèle de Weibull pour ce matériau ?
 - Pourquoi utilise-t-on une approche probabiliste plutôt qu'un simple module de rupture moyen ?
 - Dans l'industrie, comment utiliseriez-vous les résultats de Weibull pour dimensionner une pièce fragile ?
 - Le volume effectif est inférieur au volume total de l'éprouvette, pourquoi ?
 - Le PMMA et le PC ont-ils des comportements statistiques similaires ou différents ? Quel matériau utiliseriez-vous ? Voici les valeurs statistiques du PC.

Matériau	Module de rupture σ_F [MPa]	Module de Weibull m	σ_0 [MPa]
PC	60-70	10 - 20	65

7. Bibliographie

D.R. Askeland, P.P. Fulay, W.J. Wright, *The Science and Engineering of Materials*, 6th Ed., Cengage Learning, Stamford, USA, 2010

S. Grange, J.-L. Prensier, *Le modèle de Weibull : Un critère de rupture probabiliste*, ENS Cachan - Université Paris-Saclay, Paris, France, 2006

S. Grange, J.-L. Prensier, *Annexe : Détermination des paramètres de Weibull*, ENS Cachan - Université Paris-Saclay, Paris, France, 2006

R. Jain, *Effective area and effective volume calculations for ceramic tests specimens*, PhD thesis, Cleveland State University, Cleveland, USA, 2008

Annexe

La répartition des contraintes dans une éprouvette en flexion trois-points est donnée par :

$$\sigma(x, y) = \frac{6Fxy}{wh^3} \quad (\text{A.1})$$

avec

- F le chargement,
- L la distance entre les deux appuis inférieurs,
- w la largeur de l'échantillon,
- h sa hauteur.

Les axes (x,y,z) sont définis comme sur la Fig. 3 avec une origine située au centre de l'échantillon (à la limite en zone de compression et zone de tension) au niveau du premier plateau. En combinant Eq. A.1 avec σ_{flexion} la résistance à la flexion (Eq. 13), la répartition des contraintes peut être réécrite comme suit :

$$\sigma(x, y) = \frac{4xy}{Lh} \sigma_F \quad (\text{A.2})$$

La définition générale du volume effectif V_{eff} est la suivante :

$$V_{\text{eff}} = \int \left(\frac{\langle \sigma \rangle}{\sigma_F} \right)^m dV \quad (\text{A.3})$$

Avec :

- $\langle \sigma \rangle$ la valeur positive de la contrainte
- σ_F la contrainte à rupture.

Il convient donc de l'intégrer. Pour cela, quelques hypothèses simplificatrices doivent être faites : Seule la moitié inférieure en tension est considérée (de 0 à h/2 sur l'axe y) et les contraintes de cisaillement sont négligées. De plus, comme l'éprouvette est symétrique, il n'est nécessaire de n'intégrer que sur sa moitié gauche (de 0 à L/2 sur l'axe x). La contrainte ne variant pas sur l'axe z, la valeur de son intégrale est donc simplement w.

$$V_{\text{eff}} = 2 \int_0^w \int_0^{L/2} \int_0^{h/2} \left[\frac{\sigma(x, y)}{\sigma_F} \right]^m dx dy dz = 2w \int_0^{L/2} \int_0^{h/2} \left[\frac{4xy}{Lh} \frac{\sigma_F}{\sigma_F} \right]^m dx dy \quad (\text{A.4})$$

$$V_{\text{eff}} = 2w \left(\frac{4}{Lh} \right)^m \left[\frac{x^{m+1}}{m+1} \right]_0^{L/2} \left[\frac{y^{m+1}}{m+1} \right]_0^{h/2} \quad (\text{A.5})$$

$$V_{\text{eff}} = Lhw \frac{1}{2(m+1)^2} = V_{\text{epr}} \frac{1}{2(m+1)^2} \quad (\text{A.6})$$

avec $V_{\text{epr}} = Lhw$, le volume total de l'éprouvette.